

بردارهای جئوجبرایی

● سید مهدی بشارت

پروژه‌های جئوجبرایی!

طول بردار سبزرنگ a برابر $2/5$ است تا نقطه تقاطع هم 9 واحد است و می‌دانیم:

$$9 \div 2/5 = 3/6$$

$$\vec{c} = 3/6 \vec{a} + 2/6 \vec{b}$$

پس:

حالا برویم سراغ شکل ۲. باز هم باید بردار c را روی امتداد بردارهای a و b تجزیه کنیم. خودمان امتداد بردارهای سبز را رسم می‌کنیم! محور سیاه را من رسم کردم و آن یکی را هم ادامه دادم.



باز هم یک مشکل! وقتی از سر c موازی بردار b می‌کشیم، از کادر شطرنجی کتاب بیرون می‌زنند! خب برای اینکه بتوانیم مشکل را حل کنیم، باید با ابزارهای دقیق شکل را رسم کنیم. پس می‌بینید که کار با بردارها دقت ترسیمی زیادی می‌خواهد. برای همین است که درس بردار برگه شطرنجی لازم دارد و دقت زیادی در اندازه‌گیری و موازی کشیدن. به همین دلیل خیلی وقت‌ها بچه‌ها حوصله این همه دقت را ندارند و با این درس خیلی حال نمی‌کنند!

به مدد رایانه

من پیشنهاد خوبی برای شما دارم: با نرم‌افزاری کار کنید که هم دقت لازم را دارد، هم کار با آن لذت‌بخش است، هم خیلی چیزهای دیگر!

احتمالاً اسم آن را شنیده‌اید: «جئوجبرا». فعلاً همین قدر بگوییم که یک نرم‌افزار کاملاً رایگان است و از سایت خودش به نام «geogebra.org» به راحتی دانلود می‌شود.

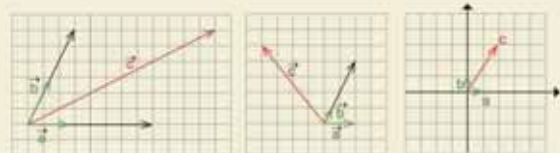
جمع جئوجبرایی دو بردار

برای اینکه بتوانیم با این نرم‌افزار کار کنیم، مسئله خودمان را کنار می‌گذاریم و از جاهای آسان‌تر شروع می‌کنیم؛ از رسم

این یکی از صفحه‌های کتاب ریاضی هشتم است. شاید شما هم در حل این مسئله‌ها به در دسر افتاده باشید.

کار در کلاس

در هر شکل، بردار c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.



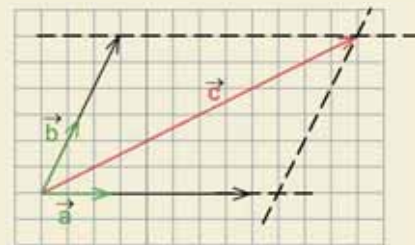
شکل ۳

شکل ۲

شکل ۱

شکل ۱ خیلی ساده است و همه می‌دانند که جوابش $2a + 3b$

می‌شود. ولی دو شکل دیگر چندان ساده نیستند. اول برویم سراغ شکل ۳. می‌خواهیم بدانیم بردار c مجموع چند برابر a و چند برابر b است. دو محور سیاه، نظیر همان محورهای مختصات در شکل ۱ هستند و بردار نیستند! باید بردار c را روی این دو راستا تجزیه کنیم. یعنی از سر بردار c موازی هر کدام از محورهای سیاه خطی رسم کنیم تا متوازی الاضلاع مورد نظرمون تشکیل شود. خب زود باشید، خط‌کش و مداد بردارید و موازی بکشید.

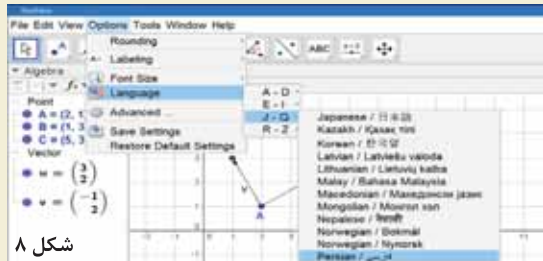


می‌بینید که مشکلاتی وجود دارند:

اول اینکه وقتی از سر c خطی موازی بردار b رسم می‌کنیم، محور پایینی را قطع نمی‌کند. اشکالی ندارد، خودمان محور پایین را ادامه می‌دهیم.

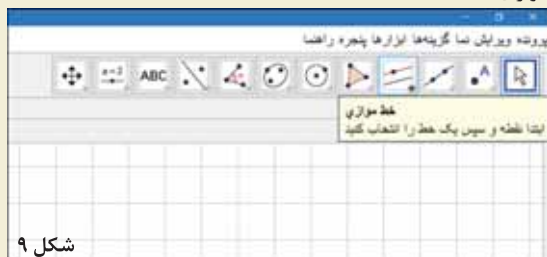


متوازی الاضلاع درست کنیم. یعنی از نقطه B موازی بردار AC و از نقطه C هم موازی بردار AB خطی بکشیم. بایید قبل از ادامه کار زبان برنامه را فارسی کنیم (شکل ۸). مواظب باشید، چیز دیگری را نزنید؛ شاید بیفتید وسط آفریقا! حالا بهتر شد. فقط همه چیز از راست به چپ شد!



شکل ۸

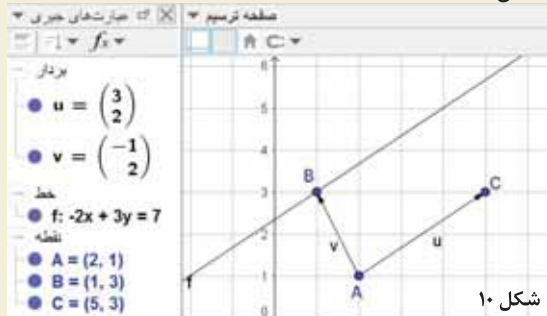
کشیدن خطهای موازی روی کاغذ دردسر است، ولی اینجا به آسانی انجام می‌شود. مثلث گوشه آیکون را که بزنید، منویی باز می‌شود که دومین مورد آن برای کشیدن خطهای موازی است.



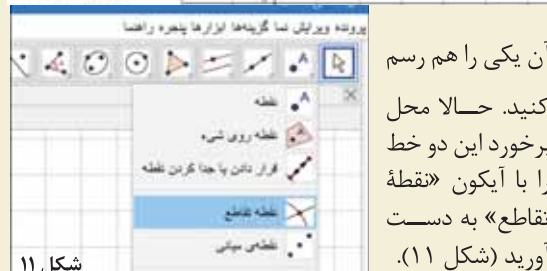
شکل ۹

یک مزیت جئوجبرا این است که ماوس را روی هر آیکونی نگه دارید، توضیحات لازم را می‌دهد. ببینید برای خط موازی چه گفته است؟ (شکل ۹)

یعنی کافی است شما روی نقطه C و سپس بردار AB کلیک کنید تا یکی از دو خط موازی که می‌خواستید، رسم شود (شکل ۱۰).



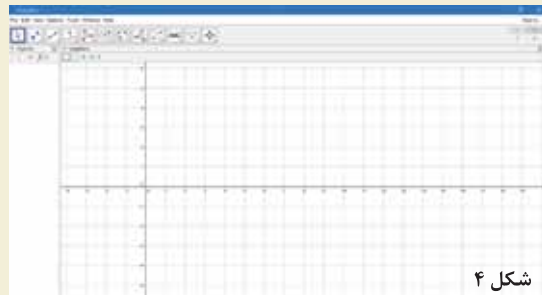
شکل ۱۰



شکل ۱۱

آن یکی را هم رسم کنید. حالا محل برخورد این دو خط را با آیکون «نقطه تقاطع» به دست آورید (شکل ۱۱).

جمع بردارها. برنامه را که باز می‌کنید، صفحه‌ای که در شکل ۴ می‌بینید، باز می‌شود.



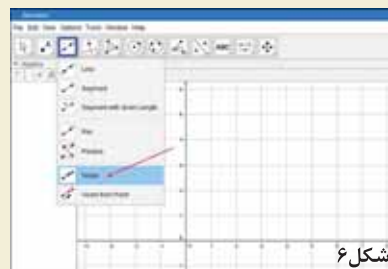
شکل ۴

با این دکمه‌ها (شکل ۵) می‌شود خطوط شطرنجی و محورهای مختصات را آورد یا برد.



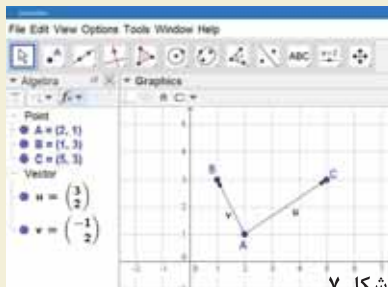
شکل ۵

گوشه هر آیکون مثلث کوچکی هست که با کلیک روی آن «منو» باز می‌شود. بردار را از اینجا انتخاب کنید (شکل ۶).



شکل ۶

مطابق شکل ۷، دو بردار بکشید که از یک نقطه شروع شوند.

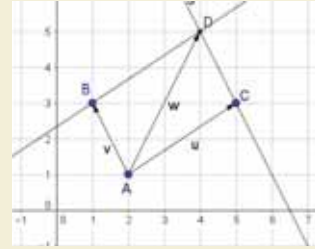


شکل ۷

چه جالب! در ستون سمت چپ، هم مختصات نقطه‌ها و هم مختصات بردارها نوشته شده است. البته کمی با مختصاتی که ما می‌نویسیم فرق دارد. ما مختصات بردار را داخل کروشه می‌نویسیم، ولی اینجا داخل پرانتز است و اشکالی هم ندارد. حالا چطور جمع بزنیم؟ شما می‌دانید که برای این کار باید یک

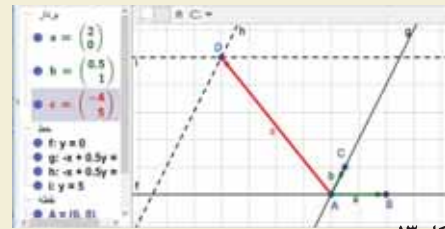


رسیدیم به آخر کار و بردار AD جواب ماست (شکل ۱۲).



شکل ۱۲

تمام لذت کار اینجاست که شما فقط یک حالت را رسم نکرده‌اید، بلکه با تغییر دادن نقاط B و C می‌توانید جمع هر دو برداری را که خواستید به دست آورید. برای این کار اول باید روی آیکون جابه‌جایی کلیک کنید.



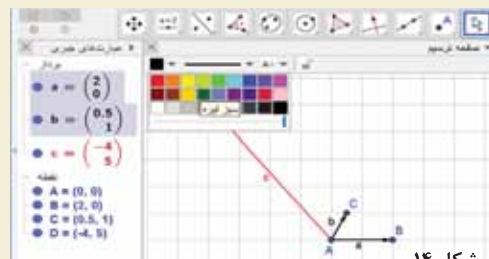
شکل ۱۳

برگردیم به مسئله شکل ۲. داشتیم این مسئله کتاب را حل می‌کردیم که به مشکلاتی برخوردیم. وقتی خط‌های موازی را می‌کشیدیم از کادر می‌زد بیرون و... برای رسم دقیق‌تر می‌خواهیم به سراغ جتوجبرا برویم. بیایید قدم‌هایی را که باید طی کنیم، بشماریم.

قدم اول: رسم بردارهای a, b و c. **قدم دوم:** رسم امتداد بردار a و b و تجزیه بردار c روی این امتدادها / **قدم سوم:** تشخیص اینکه هر کدام از این مؤلفه‌های تجزیه شده بردار c چند برابر بردارهای a و b هستند.

قدم اول

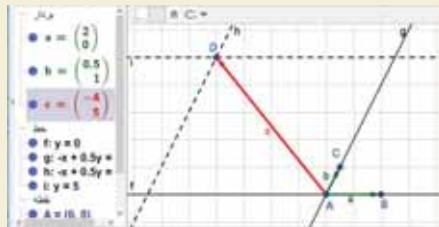
بردار a را رسم کنید. چون طول بردار b برابر با ۰/۵ است، قرقره ماوس را آن قدر بچرخانید تا بزرگ‌نمایی صفحه در حدی بشود که فاصله خطوط شطرنجی ۰/۵ واحد بشود. البته با استفاده از آیکون بزرگ‌نمایی هم می‌شد این کار را کرد. اکنون بردار b را از نقطه شروع بردار a رسم کنید و دوباره اندازه تصویر را به حالت اول برگردانید. بردار c را هم از همان نقطه شروع کنید.



شکل ۱۴

احتمالاً بردارهای شما به نام‌هایی که می‌خواهید نیستند. روی هر بردار راست کلیک کنید و با گزینه «تغییر نام» آن‌ها را a, b و c بنامید.

همچنین می‌توانید رنگ بردارها را تغییر دهید. وقتی روی هر بردار کلیک می‌کنید، بالای صفحه ترسیم آیکون‌هایی ظاهر می‌شوند که به کمک آن‌ها می‌توان رنگ و ضخامت هر شکل را تغییر داد. بردارهایتان را کمی ضخیم کنید. اگر نقاط دو سر بردارها خیلی بزرگ‌اند، می‌توانید آن‌ها را هم کوچک کنید. پیشنهاد می‌کنم محورهای مختصات را پنهان کنید، چون قرار است روی محورهای دیگری تجزیه کنیم.



شکل ۱۵

قدم دوم

با استفاده از آیکون خط‌های گذرنده از دو سر بردارهای a و b را رسم می‌کنیم. حالا بردار c را روی این دو خط تجزیه می‌کنیم (شکل ۱۵). یعنی از سر بردار c خطی موازی بردار a می‌کشیم تا یکی از این دو خط را قطع کند. همان‌طور که از قبل می‌دانید، باید از آیکون استفاده کنیم. خط موازی بردار b را هم می‌کشیم تا آن یکی را قطع کند. این خط‌ها را خط‌چین و نقاط تقاطعشان را با معلوم می‌کنیم. اگر اسامی نقطه‌ها یا بردارها جاهایی خوبی نیستند، آیکون جابه‌جایی را انتخاب کنید و اسامی را جابه‌جا کنید.

قدم سوم

حالا باید تشخیص دهیم AF چند برابر بردار a است. با کمی دقت متوجه می‌شویم $\frac{3}{4}$ برابر است. راه دیگر تشخیص نسبت AF به a این است که در نوار ورود (پایین پایین!) تایپ کنید: AF/AB و دکمه «Enter» را بزنید. آن‌وقت عدد $\frac{3}{4}$ در پنجره عبارات جبری ظاهر می‌شود. چون AF در خلاف جهت a است، باید به آن علامت منفی بدهیم. معلوم است که AE هم پنج برابر AC است. با این حساب خواهیم داشت:

$$\vec{c} = -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$$

خب، این کار هم به آخر رسید. باز هم شما اکنون ابزاری در دست دارید که با آن می‌توانید، هر مسئله‌ای شبیه این مسئله را حل کنید و بردار c را برحسب بردارهای a و b بنویسید.